Tentamen Vectoranalyse
20 Juni 2005

Zet op elk vel je naam en student nummer. Gebruik voor elke som aparte vellen. De nummers tussen de haakjes geven het aantal punten aan voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\#}{4}$$

I) (9) Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1 functie zijn en $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ een gesloten kromme, $c(0) = c(1)$. Bewijs dat,

$$\int_c \nabla f ds = 0.$$

II) Laat $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeven zijn door

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

en

$$g(x,y) = xy - 9.$$

a) (5) Bepaal alle kandidaten voor extremen waarden van f onder de conditie dat $g = 0$.

b) (4) Gebruik een tweede orde toets om het type van deze extremen te bepalen.

III) Laat $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = z\}$ een omwentelings paraboloide zijn.

a) (3) Bepaal een eenheids normaal voor het raakvlak aan S in een gegeven punt $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

b) (3) Bereken curl(F) van het vector veld

$$F(x,y,z) = (x, y, 2x^2 + 2y^2).$$

c) (3) Laat $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ een gesloten enkelvoudige kromme zijn op S. Dat wil zeggen dat c beperkt tot $[0,1)$ injectief is (one-to-one) en $c(0) = c(1)$ en $c([0,1]) \subset S$. Bereken

$$\int_c F \cdot ds.$$

Z.O.Z.

IV) Laat F een vectorveld zijn op $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeven door

$$F(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

Merk op dat dit vector veld NIET continue uitgebreid kan worden to $\mathbb{R}^2$.

a) (3) Bepaal div$F$.

b) (3) Laat $D_r = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq r\}$ en C_r de rand van D_r. Laat $\mathbf{n}$ de naar buiten wijzende eenheids normaal zijn aan de rand van D_r. Bereken

$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} F \cdot \mathbf{n} ds.$$

c) (3) Laat $D \subset \mathbb{R}^2$ een domein zijn in het vlak dat de oorsprong bevat maar de rand ∂D doorsnijdt de oorsprong niet.

$$0 \in D,$$

$$0 \notin \partial D.$$

Laat $\mathbf{n}$ de naar buiten wijzende eenheids normaal zijn aan de rand van D. Bereken

$$\int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n} ds.$$